Transferpotentiale formen und equilibrieren Geldsysteme

Robert Fischer and Dieter Braun+*

**Amriswilerstr. 108,
CH-8590 Romanshorn, Switzerland*

*+Center for Studies in Physics and Biology
Rockefeller University, New York, USA
e-mail: mail@dieterb.de*

Wir analysieren ein Geldsystem basierend auf zufälligem Geldtransfer mittels doppelter Buchhaltung. Ohne Randbedingungen erhalten wir kein Preisgleichgewicht und verletzen ökonomische Lehrbuchformeln der Quantitätstheorie (MV=PQ). Um die resultierende Geldmenge mit der Modellannahme eines konstanten Preises in Einklang zu bringen, müssen wir Randbedingungen einführen. Diese verbieten entweder bestimmte Transfers global oder erzwingen Transfers lokal. Beide Szenarien sind durch Transferpotentiale mathematisch verknüpft. Wir zeigen, daß verbotene oder erzwungene Transfers eine gaussförmige, zeltform-exponentielle, Boltzmann-exponentielle, Pareto oder auch eine periodische monetäre Gleichgewichtsverteilung des monetären Reichtums formen können. Wir leiten die Mastergleichung her und finden eine allgemeine zeitabhängige Näherungslösung. Wir finden das Äquivalent der Quantitätstheorie für zufälligen Transfer unter den flexiblen Randbedingungen eines Transferpotentials.

In letzter Zeit wurden ökonomische Modelle des Geldtransfers mit der statistischen Mechanik verknüpft [1-7]. Unter der Randbedingung einer Konstanten Anzahl von Aktiva wurde die monetäre Geldverteilung mit der Boltzmann-Gibbs-Verteilung [1-2][4] oder Verteilungen mit Paretoschwänzen [2-4] gefunden. Hinweise für diesen Ansatz fanden sich in Einkommensverteilungen [5-6]. Wir verfolgen diesen statistischen Ansatz des monetären Teils der Ökonomie [7] weiter. Im Gegensatz zu bisherigen Arbeiten, basieren wir unsere Analyse auf die allgemeinen Regeln der doppelten Buchhaltung [8]-[12]. Aktiva sind nun balanciert durch Passiva und die monetäre Reichtumsverteilung hat eine Aktiva und eine Passivaseite. Unter der Annahme eines zufälligen Geldtransfers, erhalten wir die Boltzmann-Gibbs Verteilung [1] wenn wir die Zahl der Passiva pro Teilnehmer beschränken. Wenn wir jedoch andere Randbedingungen verlangen, erhalten wir gaussförmige, zeltförmig-exponentiell oder Pareto Verteilungen.

Interessanterweise widerspricht ein zufälliger Geldtransfer ohne Randbedingungen der ökonomischen Quantitätstheorie. Die Quantitätstheorie war für lange Zeit die Grundlage der Geldpolitik und verbindet die Geldmenge M und die Umlaufgeschwindigkeit V mit dem Preisniveau P [9-10][18]. Wenn in der Quantitätstheorie die Geldmenge M oder die Umlaufgeschwindigkeit V steigt, steigt auch das Preisniveau P entsprechend (siehe Gl.(5)). Der zufällige Transfer zeigt jedoch ein abweichendes Verhalten: die Geldmenge M steigt ohne Grenzen, obwohl das Preisniveau und alle anderen Parameter der Quantitätsgleichung konstant gehalten werden. Wir argumentieren deshalb, daß die Wahl der Randbedingung ein Hauptfaktor in der Bestimmung der endgültigen Reichtumsverteilung darstellt. Es ist deshalb anzunehmen, daß die Dynamik der Teilnehmer nur eine geringe Rolle spielt. Dies würde wiederum den Ansatz bestätigen, einen zufälligen Transfer als Ausgangspunkt der monetären Analyse benutzt zu haben.

Wir entwickeln eine Potential-basierte Beschreibung der Randbedingungen für verbotene und erzwungene Transfers. Die Randbedingungen werden durch ein Transferpotential gegeben. Wir finden die Mastergleichung und können eine analytische, zeitabhängige Näherung angeben, welche für große Zeiten zur exakten Verteilung konvergiert. Ausgehend von dieser Lösung zeigen wir, daß das Transferpotential die Gleichgewichtsverteilung bestimmt. Diese monetäre Reichtumsverteilung kann beliebig durch das Transferpotential geformt werden. Dieser Potentialansatz ähnelt stark in seiner Struktur der Quantenmechanik der Schrödingergleichung.

Doppelte Buchhaltung des Geldtransfers

In der doppelten Buchhaltung ist der Transfer von Geld intrinsisch mit der Kreation von Schulden verknüpft [11][14][15][16]. Ein Geldtransfer von Teilnehmer A an Teilnehmer C veranlasst einer von vier unterschiedlichen Fällen, aufgeschrieben durch vier unterschiedliche Buchhaltungssatzkombinationen. Die vier Fälle werden anhand der Anfangsbedingungen der Aktiva und Passiva von A und C ausgewählt (Fig. 1a):

1. Transfer durch Kreation, wenn A Passiva hat und C Aktiva. A wird seine Passiva erhöhen und C seine Aktiva.
2. Transfer von Aktiva, wenn sowohl A als auch C Aktiva haben. A wird sie verkleinern und C wird sie erhöhen.
3. Transfer von Passiva, wenn sowohl A als auch C Passiva haben. A wird sie erhöhen und C wird sie verkleinern.
4. Transfer durch Vernichtung, wenn A Aktiva und C Passiva hat. A wird sein Aktiva verkleinern und C sein Passiva.

Diese vier Fälle zeigen, daß monetärer Transfer in der doppelten Buchhaltung direkt verknüpft ist mit der Kreation und der Vernichtung der Geldmenge. Anstatt daß wir Aktiva a_i und Passiva l_i eines Teilnehmers i zählen, können wir alle vier Fälle numerisch implementieren, indem wir eine einzige Reichtumsvariable p_i einführen mit:

$$p_i = a_i - l_i \tag{1}$$

In einem Transfer erniedrigen wir dann den Reichtum p_A von A und erhöhen den Reichtum p_C von C. Die obigen vier Fälle sind immer noch existent, sind aber nun hinter der Vorzeichenarithmetik der Addition und Subtraktion von p_i versteckt.

Wir übersetzen die Buchhaltungssätze in Feynmangraphen (Fig. 1a) mittels der jüngst etablierten Verbindung zwischen Buchhaltung und dem Stoßen von Teilchen, genannt Buchhaltungsmechanik [14]-[16]. In diesem mechanischen Bild, ist die statistische Mechanik des Geldtransfers die statistische Mechanik eines Teilchengases. Abweichend von einem idealen Gas wird die Energieerhaltung nicht erfüllt. Manche Transfer-Kollisionen führen zu Teilchenkreationen oder -vernichtungen.

Die ökonomische Geldmenge der Buchhaltung kann verallgemeinert werden, wenn man den Absolutwert $M_{ic} = |p_{ic}|$ der Zahl der Währungseinheiten p_{ic} von Teilnehmer i und Währung c zählt. Diese Definition übersteigt die ökonomische Definition, welche nur bestimmte Bankeinlagen zählt. Wir können die Änderung in M, ausgelöst durch einen Transfer bestimmen. Wir müssen die transferierten Währungseinheiten Δp_{ic} dazu aufspalten in eine Änderung durch Erhöhung $\Delta p_{ic}^{a+} \geq 0$ oder Verkleinerung $\Delta p_{ic}^{a-} \leq 0$ der Aktiva und durch Erhöhung $\Delta p_{ic}^{l+} \leq 0$ oder Verkleinerung $\Delta p_{ic}^{l-} \geq 0$ der Passiva. Die Änderung ist in der Summe also gegeben durch $\Delta p_{ic} = \Delta p_{ic}^{a+} + \Delta p_{ic}^{l-} + \Delta p_{ic}^{a-} + \Delta p_{ic}^{l+}$:

$$\begin{aligned} M_{ic} &= |p_{ic}| \\ \Delta M_{ic} &= \Delta p_{ic}^{a+} - \Delta p_{ic}^{l-} + \Delta p_{ic}^{a-} - \Delta p_{ic}^{l+} \end{aligned} \tag{2}$$

Ausgehend von der physikalischen Analogie der Buchhaltungsmechanik könnten wir uns auch ein quadratisches Maß der Geldmenge analog zur Definition der Energie vorstellen, indem wir definieren $E_{ic} = p_{ic}^2/2$. Die Änderung dieser Energie kann ohne die Aufspaltung von Δp_{ic} errechnet werden:

$$\begin{aligned} E_{ic} &= p_{ic}^2/2 \\ \Delta E_{ic} &= (\Delta p_{ic})^2/2 + p_{ic}\Delta p_{ic} \end{aligned} \tag{3}$$

Das neue in beiden Geldmengendefinitionen M_{ic} und E_{ic} ist, daß wir den Teilnehmer i identifizieren können, welcher die Geldmenge der Währung c verändert hat. Die Geldmenge wird so zu einer mikroskopischen Variablen. In dem zufälligen Transferschema werden wir die Gesamtgeldmengen M und E aus der Reichtumsverteilung n(p,t) wie folgt berechnen:

$$M = \langle M_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |p| n \, dp$$
$$E = \langle E_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2 n}{2} dp \tag{4}$$

Wenn wir dies tun, blenden wir die Aktiva und Passiva der Bank aus und zählen nur deren gespiegelten Teil der Teilnehmer. Andernfalls wäre die Geldmenge um Faktor 2 größer. Die Bank wird also in den folgenden Modellen nicht als Teilnehmer mitgezählt.

Die Ökonomie des zufälligen Geldtransfers: Widerspruch zur Quantitätslehre

Der zufällige Transfer des Modells ist einfach: jeder der N Teilnehmer, indexiert mittels i, haben anfänglich keine Währungseinheiten: $p_i(t=0)=0$. Sie wählen ihre Transferpartner zufällig in jedem Zeitschritt, was N Transferpaare ergibt. Jedes Paar transferiert Δp Währungseinheiten. So ein vereinfachtes Modell ist motiviert durch das Resultat, daß die Details der Geldtransfermodelle nicht essentiell erscheinen [1]. Indem wir ein zufälliges Transferschema wählen, bilden wir die einfachste Nichtkreislauf - Geldtransferökonomie. Der zufällige Transfer bildet zum Beispiel N Bauern ohne Überschuss ab, welche eine fluktuierende Ernte p_0-Δp, p_0 oder p_0+Δp jedes Jahr ausgleichen, damit niemand verhungern muss.

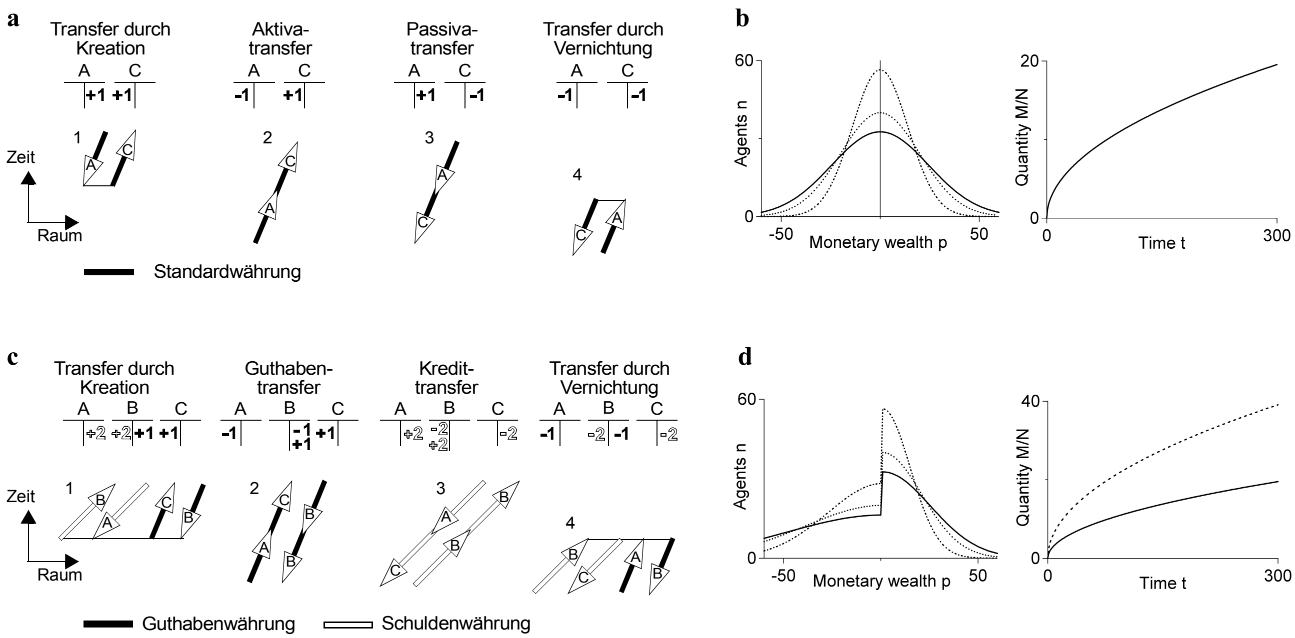

Fig. 1: Buchhaltung des Geldtransfers und zufälliger Geldtransfer. (a) Geldtransfer von Teilnehmer A nach C ohne eine Bank ergibt vier Möglichkeiten abhängig vom anfänglichen Menge von Aktiva und Passiva der Teilnehmer A und C. (b) Zufälliger Geldtransfer ergibt eine expandierende gaussförmige monetäre Reichtumsverteilung. Die Geldmenge steigt ohne Grenzen. (c) Die vier Fälle des Geldtransfers von Teilnehmer A nach C durch eine Bank N etabliert ein Zweiwährungssystem zwischen einer Guthabenwährung und einer Schuldenwährung [16]. (d) Mit einem Umtauschkurs von 1:2 zwischen Guthaben- und Schuldenwährung finden wir eine Stufe in der Verteilung. Die Geldmenge der beiden Währungen unterscheiden sich entsprechend um einen Faktor 2.

Der zufällige Geldtransfer ergibt einen expansiven Diffusionsprozess, dessen Diffusionskonstante D gegeben ist durch

$$D=(\Delta p)^2/\Delta t \tag{5}$$

Wir zu erwarten ist die monetäre Reichtumsverteilung n(p,t) gaussförmig und die Gesamtgeldmenge M ist eine wurzelförmigen Funktion der Zeit:

$$\dot{n} - D\Delta n = 0 \qquad n = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp-\frac{p^2}{4Dt}$$
$$M = 2N\sqrt{Dt/\pi} \qquad E = NDt \tag{6}$$

Dieses analytische Ergebnis wird mit einer numerische Simulation [17] verglichen. Wir zeigen die Verteilung für N=2000 und $\Delta p=1$ zu den Zeitpunkten $t=100\Delta t$, $200\Delta t$ und $300\Delta t$ zusammen mit der Zeitevolution der Geldmenge pro Teilnehmer M/N in Fig. 1b.

Wir zählen die Häufigkeit der angewandten Buchhaltungssätze. Für N=2 finden wir nur Kreationen oder Vernichtungen, Transfer von Aktiva oder Transfer von Passiva tritt erst für N>2 auf. Die Kreationen tauchen öfter als die Vernichtungen auf, was für die Erhöhung der Geldmenge M - unabhängig von N - verantwortlich ist. Dies ist die Folge der Asymmetrie der Anfangsbedingungen der vier Transferfälle: für einen Transfer von zwei Teilnehmer mit p=0 ergibt sich immer eine Kreation - eine Vernichtung ist nicht möglich.

Dieses Modell des zufälligen Transfers widerspricht Textbuchformeln der Quantitätstheorie. Mit M der Geld'versorgung', V der Umlaufgeschwindigkeit, P dem Preis'niveau' und Q dem 'realen' Bruttoinlandsprodukt (BIP) findet die Quantitätstheorie [9][10][18]

$$MV = PQ \tag{7}$$

Der zufällige Geldtransfer ergibt ein konstantes $V=\Delta p/\Delta t$, ein konstantes Preisniveau $P=\Delta p$ und ein konstantes BIP gegeben durch die Zahl der Teilnehmer N multipliziert mit den transferierten Preisen pro Zeitabschnitt $Q=N\Delta p/\Delta t$. Wir erwarten deshalb eine konstante Geldmenge $M=N\Delta p$. Wir finden jedoch ein ohne Grenzen ansteigendes M. Die Quantitätstheorie ist also im zufälligen Transfer nicht anwendbar - sie kreiert Aktiva-Passiva-Paare durch überzogene Konten. Solche wichtige Einschränkungen waren von den Erfindern der Quantitätstheorie bekannt, fielen aber der Vergessen anheim (siehe die Diskussion in [18], S. 40ff).

Im Fall, wenn die Teilnehmer durch eine Bank B Geld transferieren, spaltet sich die Buchführung in zwei unabhängige Währungen. Eine wird für die Aktiva der Teilnehmer benutzt (schwarze Guthabenwährung) und die andere für die Passiva der Teilnehmer (weiße Schuldenwährung) wie in den Buchhaltungssätzen von (Fig. 1c) gezeigt und in Ausführlichkeit anderswo diskutiert [16]. In solch einem Zweiwährungssystem beinhaltet ein Transfer zwei Preise: ein Guthabenpreis wenn es von Guthaben beglichen wird oder einen Schuldenpreis, wenn es durch Schuldenaufnahme gezahlt wird. Als Beispiel nehmen wir einen Transfer von $\Delta p_D=1$ Guthabenwährungseinheiten und $\Delta p_L=2$ Schuldenwährungseinheiten an, welches einen Umtauschkurs von 1:2 zwischen den beiden Währungen definiert. In diesem Fall expandiert die Passivaseite der Verteilung doppelt so schnell wie die Aktivaseite (Fig. 1d). Die Diskontinuität bei p=0 in der Verteilung ist kein Artefakt, weil wir die vier Buchhaltungssätze des Zweiwährungssystems anwenden (Fig. 1c). Das bedeutet, daß wir nicht weiter die kompakte Abkürzung von Gl. (1) benutzen können, sondern die Aktiva und Passiva getrennt verbuchen müssen. Obwohl es instruktiv (und einfach möglich) wäre, das Zweiwährungssystem durch die folgende Diskussion hindurchzuziehen, werden wir uns im folgenden wieder auf eine Währung beschränken, was auch der heutigen Bankenbuchhaltungspraxis entspricht [16].

Verbotene Transfers equilibrieren die Zufallsökonomie global.

Wir haben bis jetzt gesehen, daß eine zufällige Auswahl der Transferpartner die Geldmenge ohne Limit erhöhen wird. Im folgenden werden wir diskutieren, wie Randbedingungen das System equilibrieren können. In fast allen Fällen wird eine konstante Geldmenge M erreicht. Wir werden versuchen, die Ergebnisse mit der Quantitätslehre in Einklang zu bringen.

Wir können ein Gleichgewicht dem System aufdrücken, wenn wir die Transfers verbieten, die das quadratische Maß der gesamten Geldmenge E über einen Zielwert E_0 erhöhen würde. Dies ist ein globaler, nichtlokaler Ansatz. Vor jedem Transfer muss geprüft werden, ob die Summe E über das Limit E_0 erhöht werden würde. Mit einer solchen Transferbeschränkung konvergiert die Verteilung zu einem gaussförmigen Profil (E_0=25πN; Fig. 2a: Verteilung für t=300Δt, Fig. 2b durchgezogene Linie: Quantität M/N pro Teilnehmer):

$$n = \frac{N}{\sqrt{4\pi E_0/N}} \exp-\frac{Np^2}{4E_0} \qquad M = 2\sqrt{\frac{E_0 N}{\pi}} \qquad (8)$$

Eine andere Möglichkeit, den zufälligen Transfer zu equilibrieren ist, alle Transfers zu verbieten, welche die Gesamtgeldmenge M über ein Limit M_0 erhöht. Jetzt konvergiert der zufällige Transfer zu einer zeltförmigen Exponentialverteilung (M_0=10N; Fig. 2d: Verteilung bei t=300Δt, Fig. 2e durchgezogene Linie: Geldmenge M/N pro Teilnehmer über die Zeit):

$$n = \frac{N^2}{2M_0} \exp-\frac{N|p|}{M_0} \qquad M = M_0 \qquad (9)$$

Für die beiden letzten Fälle der Transferbeschränkungen würden wir das Ergebnis der Quantitätslehre finden, wenn wir explizit eine Skalierung von $M = N\Delta p$ annähmen. Dies bedeutet, daß wir wissen müssten bei der Festlegung der Limite M_0 oder E_0, wie hoch das Preisniveau Δp des Systems ist.

Bei der Simulation von Modellsystemen wird typischerweise ein Passivalimit angewandt [1]-[7]. Wir simulieren auch diesen Fall und verbieten alle Transfers, welche die Passiva eines Teilnehmers über ein Limit L erhöhen würden. Diese Schuldeneinschränkung führt zu einer exponentiellen Boltzmannverteilung n(p) analog zu den Ergebnissen in der Literatur [1]-[7] (L=5e; Fig. 2g: Verteilung bei t=300Δt, Fig. 2h durchgezogene Linie: Geldmenge M/N pro Teilnehmer über die Zeit):

$$n = \frac{N}{L} \exp-\frac{p+L}{L} \qquad M = 2NLe^{-1} \qquad (10)$$

Die Quantitätstheorie (7) würde erfüllt, wenn das Passivalimit wiederum explizit mit dem Preis Δp mittels L=eΔp/2 skalieren würde - dann ergäbe sich ein recht niedriges Passivalimit von L=1.36 für Δp=1. Der Fall mit Passivalimit wurde gründlich von Dragulescu und Yakovenko diskutiert[1].

Wir können eine Paretoverteilung aufdrücken, indem wir eine logarithmische Geldmenge definieren $G_{ic} = \ln|p_{ic}|$ und alle Transfers verbieten, welche diese Geldmenge über eine Grenze G_0 erhöhen würde. In diesem Fall versucht die Verteilung, eine Paretoverteilung anzunehmen (G_0=0.8N; Fig. 2k: Verteilung bei t=300Δt, Fig. 2l durchgezogene Linie: Geldmenge M/N über die Zeit):

$$n = k|p|^{-1/D} \qquad M \to \infty \qquad (11)$$

Die Geldmenge M divergiert langsam. Da die Paretoverteilung nicht normiert werden kann [20], müssen wir mit k=215 fitten, um die Körnigkeit und das Timing der numerischen Simulation zu treffen. Weiterhin musste die Simulation ein G=0 für p=0 annehmen. Trotzdem wird die Paretoverteilung mit ihrer hyperbolischen Form erreicht. Eine Änderung im Preisniveau Δp beeinflusst D und damit die funktionelle Form der Verteilung.

Wir müssen anmerken, daß nichtlineare Geldmengendefinitionen wie E oder G nur dann funktionieren, wenn die Teilnehmer eindeutig mit i durchnummeriert sind. Aufteilungen des monetären Reichtums eines Teilnehmers in Unterteilnehmer würden die Summe E_0 oder G_0 ändern. Dieses Problem ist lösbar: jegliche Buchhaltung muss direkt mit der physikalischen realen Person verknüpft sein.

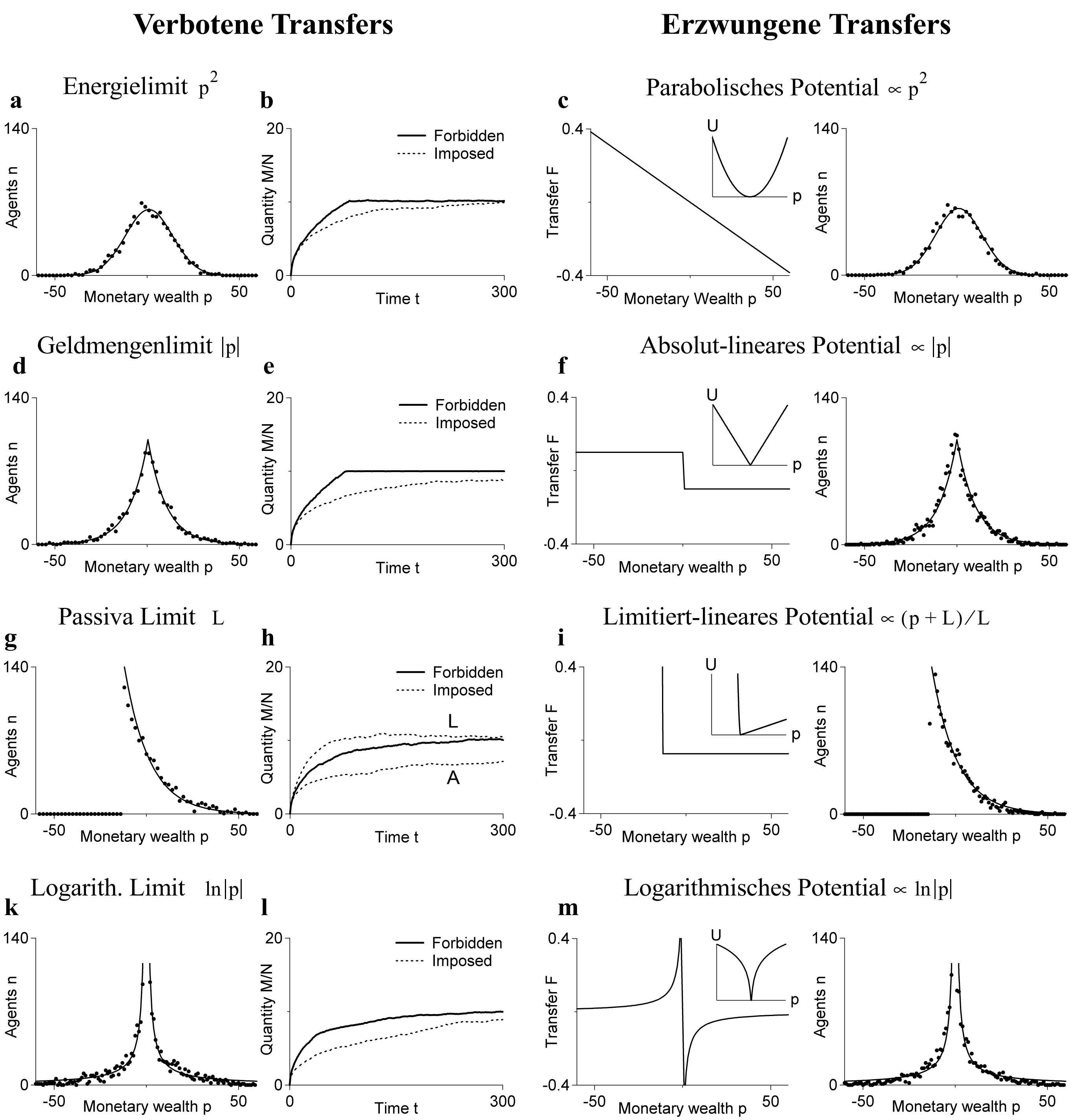

Fig. 2: Unterschiedliche Randbedingungen equilibriert den zufälligen Geldtransfer in unterschiedliche Verteilungen. (a-c) Wir verbieten Transfers, welche die Gesamtenergie des Geldes über E_0 erhöhen würden und finden eine gaussförmige Verteilung, welche auch gefunden wird, wenn wir Transfers abgeleitet von einem parabolisches Potential erzwingen. (d-f) Wir verbieten Transfers, welche die Gesamtgeldmenge über M_0 erhöhen würden und finden eine zeltförmig-exponentielle Verteilung, welche auch gefunden wird, wenn wir Transfers abgeleitet von einem absolut-linearen Potential erzwingen. (g-i) Wir verbieten Transfers, welche die Nichtbank-Passiva über eine Limit L erhöhen würden und finden eine Boltzmann-exponentielle Verteilung, welche auch gefunden wird, wenn wir Transfers abgeleitet von einem limitiert-linearen Potential erzwingen. (k-m) Wir verbieten Transfers, welche die logarithmisch definierte Gesamtgeldmenge über G_0 erhöhen würden und finden eine Paretoverteilung, welche auch gefunden wird, wenn wir Transfers abgeleitet von einem logarithmischen Potential erzwingen.

Erzwungene Transfers equilibrieren die Zufallsökonomie lokal: Transferpotentiale

Bis jetzt haben die Randbedingungen spezifische Transfers unterbunden. Eine zweite Klasse der Randbedingungen erlauben alle Transfers, wirken aber auf die angehäuften Aktiva und Passiva mittels erzwungenen Transfers. Dies ergibt einen lokalen Ansatz, da wir nicht mehr die Gesamtgeldmenge vor jedem Transfer messen müssen. Wir werden zeigen, wie lokale, erzwungene Transfers zu den gleichen Gleichgewichten führt, wie der globale Ansatz der verbotenen Transfers von zuvor.

Zum Beispiel erreichen wir ein Gleichgewicht, wenn wir einen negativen Zinssatz r für Aktiva und Passiva erzwingen. Die Einheit von Zins ist % pro infinitesimales Zeitinterval δt. Innerhalb einer makroskopischen Zeit Δt verändert die Anwendung von Zins die Aktiva und Passiva durch einen Faktor $f = \exp(r\Delta t) = \tilde{r}\Delta t + 1$, welcher einen Zinssatz $\tilde{r}$ des endlichen Zeitintervals Δt definiert. Der Zufallstransfer konvergiert nun zu einem zeitunabhängigen Gaussprofil ($r=-1/(50\pi\delta t)=-0.64\%/\delta t$, Fig. 2c, rechts: Verteilung zur Zeit $t=300\Delta t$):

$$n = N\sqrt{\frac{-r}{2\pi D}}\exp\left[\frac{rp^2}{2D}\right]$$
$$M = 2N\sqrt{\frac{D}{-2\pi r}} \qquad E = \frac{ND}{-r} \tag{12}$$

Erstmalig erhalten wir die Skalierung des Preises der Quantitätslehre direkt: $M \propto N\sqrt{D} \propto N\Delta p$. Wir erhalten die exakte Gleichung der Quantitätstheorie (7) für einen recht hohen negativen Zinssatz von $r = -2/\pi\delta t = -64\%/\delta t$. Ein negativer Zins realisiert also die implizite Preisskalierung der Quantitätstheorie.

Dieses Beispiel gibt uns ein Arbeitsmodell. Wir können möglicherweise dieselben Verteilung durch verbotene Transfers oder durch erzwungene Transfers erhalten. Die erzwungenen Transfers sind lokal definiert und zeigen keine explizite Funktion des Preisniveaus Δp oder der Umlaufgeschwindigkeit $\Delta p/\Delta t$. Nichtsdestotrotz hängt die sich ergebende Gleichgewichtsverteilung von D ab, wie zu erwarten von einem Geldsystem in dem die monetäre Reichtumsverteilung das Preisniveau wiederspiegelt. Wir werden im folgenden zeigen, daß beide Randbedingungsansätze sich vereinigen lassendurch eine Interpretation der Geldmengendefinition (M,E oder G) als ein Transferpotential U. Wir werden eine allgemeine Mastergleichung des Transferpotential-eingeschränkten zufälligen Geldtransfers mitsamt einer allgemeinen Näherungslösung herleiten.

Wir führen ein Transferpotential U(p) ein. Es modelliert einen zusätzlichen, erzwungenen externen Transfer F, der gegeben ist durch den transferierten Betrag Δp pro Zeitintervall Δt. Wir definieren F wie üblich in der Physik durch die negative Ableitung des Potentials U(p):

$$F(p) = \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\nabla U(p) \tag{13}$$

Man kann sich unter F eine Zinsstaffelungstabelle vorstellen, oder ein rechtliches System, welches Steuerneinnahmen und Ausgaben einführt, welche nur von dem monetären Reichtum p eines Teilnehmers abhängt. Typischerweise würden wir U(p) durch Integration errechnen von bekannten erzwungenen Transfers F(p). Wenn wir den monetären Fluss $nF(p)$ durch die Transfers F zum ersten Fick'schen Gesetz hinzufügen, erhalten wir:

$$j = -D\nabla n - n\nabla U(p) \tag{14}$$

Das Potential U hat die gleichen Einheiten wie die Diffusionskonstante D. Unser Ansatz ähnelt der Behandlung der Thermophorese (wenn man U als Temperatur interpretiert) [19]. Innerhalb der Logik der Buchhaltungsmechanik [14][15][16], würden die Einheiten von D und U einer Leistung entsprechen und die Einheit von F einer Kraft. Durch das übliche Einsetzen des Fick'schen Gesetzes in die Kontinuitätsgleichung, leiten wir die Mastergleichung des zufälligen Transfers unter einem Transferpotential her:

$$\dot{n} - D\Delta n - \nabla[n\nabla U(p)] = 0 \tag{15}$$

Wir können eine allgemeine, zeitabhängige Näherungslösung angeben, wenn alle Teilnehmer mit p=0 zum Zeitpunkt t=0 starten:

$$n(p, t) \cong N \frac{\exp-\frac{p^2}{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \frac{\exp-\frac{U(p)}{D}}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-U(p)/D]dp} \quad \text{(16)}$$

Die Näherung ist gültig, wenn der Ausdruck $p\nabla U/Dt$ vernachlässigbar wird. Für lange Zeiten ist die Verteilung deshalb nur gegeben durch das Potential U und der Diffusionskonstante D:

$$n(p) \propto \exp\left(-\frac{U(p)}{D}\right) \quad \text{(17)}$$

Die Diffusionskonstante D definiert also die Einheiten, in denen das Transferpotential gegeben wird. Änderungen im Preisniveau wird D ändern und die Verteilung mit dem Exponenten $-1/D$ nach den Gleichungen (16) und (17) umskalieren.

Das Potential U(p) kann möglicherweise eine Asymmetrie in der Gleichgewichtsverteilung (17) hervorrufen. Die Geldmenge M könnte sich unterscheiden für die Gesamtzahl der Aktiva M_A und der Gesamtzahl der Passiva M_L. Dies bedeutet, daß ein externer Transfer p_{ext} aus dem System gezogen (-) oder hinzugefügt (+) worden ist zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2:

$$p_{ext}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p[n(t_2) - n(t_1)]dp \quad \text{(18)}$$

Logischerweise muss bei $p_{ext} \neq 0$ ein zusätzlicher Teilnehmer definiert werden, um die fehlenden Aktiva oder Passiva zu verbuchen. Typischerweise würde diese Rolle einer Bank oder dem Staat zufallen. Wir könnten also zum Beispiel p_{ext} benutzen, um Staatsdefizite zu modellieren. Im folgenden werden wir jedoch keine Transferpotentiale U besprechen, welche einen externen Transfer p_{ext} induziert.

Im ersten Teil dieses Papers haben wir vier Randbedingungsszenarien gezeigt, welche den Zufallstransfer eingeschränkt haben (8)-(11). Nun können wir die identischen Gleichgewichtsverteilungen erreichen, ohne daß wir irgendwelche Transfers verbieten, sondern, indem wir zusätzliche Transfers erzwingen (13)-(17). Das Transferpotential beeinflusst den Zufallstransfer so, daß er den Randbedingungen gehorcht:

(i) Parabolische Potentiale ergeben ein Energielimit und führen zu einer Gaussverteilung (Fig. 2c)

(ii) Absolut-Linear Potentiale ergeben ein Geldmengenlimit und führen zu einer zeltförmigen exponentiellen Verteilung (Fig. 2f)

(iii) Limitiert-lineare Potentiale ergeben ein Passivalimit und führen zu einer Boltzmann-exponentiellen Verteilung (Fig. 2i)

(iv) Logarithmische Potentiale ergeben logarithmisches Limit und führen zu einer Paretoverteilung (Fig. 2m).

In jedem dieser Fälle machten wir eine numerische Berechnung für N=2000, Δp=1, D=1 bis t=300Δt. Wir zeigen die Geldmenge M/N über die Zeit (gestrichelte Linie in Fig. 2b,e,h,l) zuammen mit dem benutzen Transfer F, dem Transferpotential U und der letzten Verteilung in Fig. 2c,f,i,m. Die letzte Verteilung wird verglichen mit der analytischen Gleichgewichtsverteilung (17) der Mastergleichung (15), gezeichnet mit einer durchgezogenen Linie in (Fig. 2c,f,i,m). Die angewandten Transferpotentiale U und die davon abgeleiteten Transfers F sind wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & U = -\frac{rp^2}{2} & F = rp \\
\text{(ii)} & U = F_0|p| & F = -\mathrm{sgn}(p)F_0 \\
\text{(iii)} & U = \begin{cases} \infty & ,p<-L \\ \frac{D(p+L)}{L} & ,p>-L \end{cases} & F = \begin{cases} '\infty' & ,p<-L \\ -\frac{D}{L} & ,p>-L \end{cases} \\
\text{(iv)} & U = \ln|p| & F = -\frac{1}{p}
\end{array} \quad \text{(19)}$$

Sie ergeben die folgenden Mastergleichungen und deren Gleichgewichtsverteilung n(p):

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \dot{n} - D\Delta n + 2r[n + p\nabla n] = 0 \\
& && n(p) = N\sqrt{\frac{-r}{2\pi D}}\exp\left(\frac{rp^2}{2D}\right) \\
&\text{(ii)} && \dot{n} - D\Delta n - \operatorname{sgn}(p)F_0\nabla n = 0 \\
& && n(p) = N\frac{F_0}{2D}\exp\left(-\frac{F_0|p|}{D}\right) \\
&\text{(iii)} && \dot{n} - D\Delta n - \frac{D\nabla n}{L} = 0 \\
& && n(p) = \frac{N}{L}\exp\left(-\frac{p+L}{L}\right) \\
&\text{(iv)} && \dot{n} - D\Delta n - \nabla\left[\frac{n}{|p|}\right] = 0 \\
& && n(p) = k|p|^{-1/D}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(20)}
$$

Wir vergleichen diese Ergebnisse des erzwungenen Transfers mit den Ergebnissen des verbotenen Transfers (8)-(11):

(i) Das parabolische Potential entspricht (8), wenn $E_0 = -ND/r$ und $\langle U\rangle = ND/2$.

(ii) Das absolut-lineare Potential entspricht (9) wenn $F_0 = ND/M_0$ und $\langle U\rangle = ND$.

(iii) Der limitiert-lineare Fall entspricht direkt (10) und wir finden wieder $\langle U\rangle = ND$. Wir simulierten diesen Fall mit einem steilen Parabelpotential bei p=-L um die numerische Behandlung zu erlauben. Die Passiva (Fig. 2h, L) konvergierten viel schneller ins Gleichgewicht als die Aktiva (A), welche hinterherhinkten. Letztlich erreichen aber beide denselben Level und sorgen für p_{ext}=0 im Limit $t \to \infty$ (18).

(iv) Das logarithmische Potential entspricht den Ergebnissen der verbotenen Transfers (11). Wir mußten obere und untere Schranken für F bei kleinen Werten von |p| einführen, um die Simulation konvergieren zu lassen.

Wir sehen, daß das Potential U, welches den Transfer bestimmt, identisch mit der Definition der limitierenden Geldmenge bei verbotenen Transfers ist: (i) $U \propto E$; (ii) $U \propto M$; (iii) $U \propto p + L$ und (iv) $U \propto G$. Dies ist kein Zufall, wie im folgenden gezeigt wird. Wenn ein Transfer verboten ist, bedeutet es, daß ohne Randbedingungen der Transfer stattgefunden hätte, aber die erzwungenen Transfers ihn wieder zurücknahmen. Wir können dieses Bild verallgemeinern unter der Annahme, daß der Geldfluss j, gegeben durch (14) im Gleichgewicht null ist ($\dot{n} = 0$). Dann erhalten wir durch partielle Integration:

$$
\langle U\rangle = ND - D\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U\Delta U}{(\nabla U)^2}n\,dp \qquad \text{for} \quad \lim_{p \to \pm\infty}\frac{Un}{\nabla U} = 0 \qquad \textbf{(21)}
$$

Die verbotenen Transfers, gegeben durch ein Limit auf das Quantitätsmaß $\langle U\rangle$, sind also identisch dem Transferpotential U in einer Ökonomie des zufälligen Transfers! Nehmen wir zum Beispiel das parabolische Potential mit dem Zinssatz r gegeben durch $U=-rp^2/2$. Wenn wir den Zinssatz ändern, ändern wir auch das quadratische Maß der Geldmenge $U_{ic} = -rp_{ic}^2/2$. Deshalb, weil der Zins auch die Geldmenge U_{ic} ändert, erhalten wir stets im Gleichgewicht $\langle U\rangle = ND/2$, gegeben durch (21) unabhängig vom Zinssatz r.

Wir nennen den Zusammenhang (21) die verallgemeinerte Quantitätstheorie des beschränkten Zufallstransfers. Es verbindet das Messfunktional der Geldmenge U mit den Zahl der Teilnehmer N und der Marktdiffusionskonstante D. Die Einheiten der Gleichung ($N\Delta p^2/\Delta t$) sind identisch der klassischen Quantitätsgleichung (7).

Die Gleichung (21) ähnelt dem Gleichverteilungssatz der statistischen Mechanik wenn man U als Energie und D als Temperatur auffasst. Dann können wir auch die Gleichgewichtsverteilung der Gleichung (17) als Boltzmanverteilung der statistischen Mechanik interpretieren. Wir können sie dazu benutzen, die Zustandssumme $Z(t) \cong \int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\tilde{U}/D]dp$ sogar über die Zeit zu definieren mit der Energie $\tilde{U}(p,t) = p^2/4t + U(p)$. Dann finden wir die freie Energie F mittels $F = -DN\ln Z$ und erhalten die Verteilung von (16) durch Ableitung

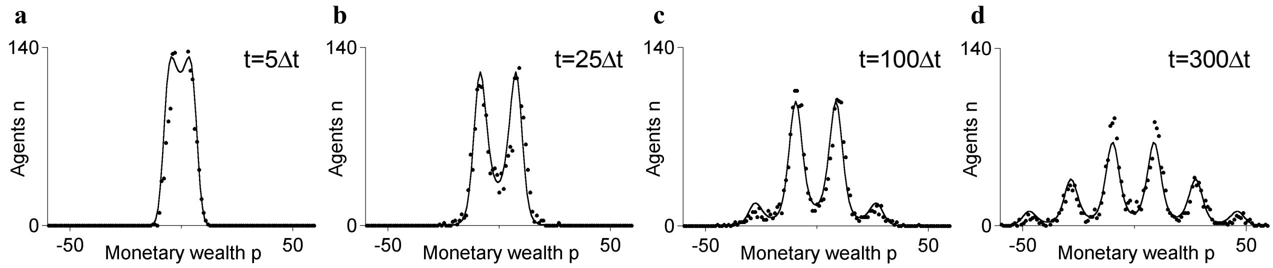

Fig. 3: Zufallstransfer unter einem sinusförmigen Transferpotentials. Die allgemeine, zeitabhängige Näherung [(16), durchgezogene Linie] beschreibt die Verteilung der Simulation [gepunktet] sehr gut. Der erzwungene Transfer zeigt Verteilungsmaxima bei Potentialminima, beschrieben durch (17).

$n = \partial F/\partial\tilde{U}$. Die Entropie $S = -\int_{-\infty}^{\infty} n\ln(n)dp$ kann abgeleitet werden aus $S = -\partial F/\partial D$ und die zeitabhängige Version von (21) erhält man aus $\langle U\rangle = ND^2/Z\cdot\partial Z/\partial D$.

Indem man Transfers erzwingt, anstatt Transfers zu verbieten, muss man keine schwierig zu implementierende Messung des Preisniveaus Δp, der Diffusionskonstante D und der Zahl der Teilnehmer N auf sich nehmen. Das Geldsystem wird zu einer Verteilung konvergieren, die von D und N abhängt, obwohl der regulierende Transfer $F = -\nabla U$ nicht von den Marktparametern Δp, N und D abhängt. Dies ist sehr wichtig und stimmt für den absolut-linearen Fall ($M \neq M(\Delta p, N, D)$) und den parabolischen Fall für Zins ($E \neq E(\Delta p, N, D)$), nicht jedoch exakt für den Fall des Passivalimits. Dort hängt das Potential U von der Diffusionskonstante D ab, um ohne externen Transfer $p_{ext}=0$ (18) konvergieren zu können.

Der zweite Vorteil der erzwungenen Transfers ausgehend von einem Transferpotential ist die lokale Natur der Gleichgewichtsregulierung. Nur die lokale Regel (13) muss angewandt werden, die Gesamtgeldmengen M, E oder G müssen nicht gemessen werden. Dies ist ein weiterer sehr wichtiger Vorteil für eine Regulierung mit erzwungenen Transfers.

In der realen Welt werden die Transferpotentiale $U(p_i,i)$ der Teilnehmer i definiert durch die Abweichung der Teilnehmer von einem zufälligen Verhalten, zum Beispiel erzielt durch die Input-Output Charakteristik von Banken und dem Staat. Wir haben hier die Näherung angewandt, daß das Transferpotential $U(p_i)$ nur von dem monetären Reichtum p des Teilnehmers i abhängt. Zweitens nahmen wir an, daß die Ökonomie dominiert wird von Teilnehmern, welche durch eine Umgebung zu zufälligen Transfers gezwungen werden. Mit so einer Zufallstransferannahme könnten wir aus Steuergesetzen und Zinssatzprogressionen berechnen, welche Gleichgewichtsverteilung n(p) zu erwarten ist.

Wir wollen am Ende zeigen, daß die Potentialtheorie alle denkbaren Reichtumsverteilungen formen kann. Es soll auch zeigen, daß die zeitabhängige Näherungslösung (16) recht genau ist. Nehmen wir an, wir erzwingen ein sinusförmiges Transferpotential U:

$$U = \cos(p/3) \qquad F = \frac{1}{3}\sin(p/3) \tag{22}$$

Wir simulieren dieses Geldsystem mit den üblichen Parametern N=2000, D=1 und zeigen die simulierte Verteilung mit der theoretischen Näherung (16) zu den Zeitpunkten t=5Δt, 25Δt, 100Δt und 300Δt in Fig. 3a,b,c,d. Die erzwungenen Transfers F drücken der Reichtumsverteilung ein Gitter auf, während sie durch die

Diffusion sich verteilt, ohne auf eine Gleichgewichtsverteilung zu konvergieren. Die Näherung (16) beschreibt die Simulationsergebnisse über die Zeit mit einer hohen Genauigkeit.

Diejenigen, die mit der Lösung der Schrödingergleichung vertraut sind, werden Ähnlichkeiten erkennen zwischen dem hier beschriebenen potentialbeschränkten Zufallsgeldtransfer und der Quantenmechanik. Das 'Wellenpaket' diffundiert ohne Potential. Die zeitabhängige Lösung hat einen exponentielle Vorfaktor. Die Energie darf fluktuieren. Wahrscheinlich ist dies nur ein Zufall durch die Ähnlichkeiten der Diffusionsgleichung (15) und der Schrödingergleichung. Es ist auch festzuhalten, daß wir uns hier laut der Analogie der Buchhaltungsmechanik im Impulsraum p und nicht im Ortsraum x bewegen. Trotzdem sollten die Ähnlichkeiten sehr nützlich sein, sich dem zufälligen Transfer ausgehend von der Physik zu nähern. Wir wählten die Variablennamen aus der Physik, um diesen Übergang zu vereinfachen. Das physikalische Analogon ist ein Gas [14], worin Teilchen stoßen, sich kreieren und sich vernichten unter Bedingungen von zufälligem Impulstransfer und Impulserhaltung. Energieerhaltung wird nicht erzielt, es sei denn, wir wenden Randbedingungen eines Potentials an. Das Potential modelliert eine viskose Reibung eines Mediums, um die Energieerhaltung zu erzielen.

Schlussfolgerung

Wir diskutierten eine Ökonomie des zufälligen Geldtransfers, basierend auf den Regeln der doppelten Buchhaltung. Interessanterweise können wir kein Preisgleichgewicht erzielen, wenn keine restriktiven Randbedingungen verlangt werden. Die Randbedingungen verbieten entweder bestimmte Transfers oder erzwingen bestimmte Transfers. Wir können beide Arten der Randbedingung analytisch vereinen, wenn wir die Geldmengendefinition als Transferpotential auffassen. Wir erhalten eine große Vielfalt an Verteilungen durch die Anwendung von unterschiedlichen Potentialen. Der Potentialansatz ist eine leistungsfähige Methodik, um Verteilungen und ihre zugrundeliegenden Transfers zu beschreiben. Die Mastergleichung des zufälligen Transfers (15) konvergiert zu einer allgemeinen Verteilung (17) und erlaubt es, analytische Lösungen zu erhalten für eine Vielzahl von beschränkten, zufälligen Geldtransfers. Da dieser Ansatz so nahe der Mathematik der Quantenmechanik und der statistischen Mechanik ist, erwarten wir weitere Einsichten und Querverweise aus der Physik. Darüberhinaus kann dieser leistungsfähige Ansatz übertragen werden auf andere Größen, welche in einer Ökonomie ausgetauscht und reguliert werden.

Wir finden, daß eine jegliche Anwendung der Quantitätstheorie unter beschränkenden Randbedingungen operieren muss. Zentralbanken haben ihre Definition der Geldmenge in letzter Zeit mehrfach geändert. Die FED und die schweizer Zentralbank haben es zuletzt aufgegeben, die Geldmenge überhaupt zu definieren. Unsere Ergebnisse zeigen, daß Randbedingungen zentral sind und daß ihre Änderung über die Zeit betrachtet werden muss. Wenn Zentralbanken ihren Geldwert über die Zeit regulieren wollen, werden sie von der gezeigten allgemeinen Potentialtheorie von Geldsystemen profitieren können.

Die Autoren sprechen ihren Dank aus an Koichiro Matsuno, Victor Yakovenko und Benjamin Franksen für Kommentare und an Klaus-Peter Karmann, Veronica Egger und Noel Goddard für das Lesen von älteren Versionen des Manuskripts.

[1] A. Dragulescu and V.M. Yakovenko, Eur. Phys. J. B 17:723 (2000)

[2] S. Ispolatov, P.L. Krapivsky, S. Redner, Eur. Phys. J. B 2:267 (1998)

[3] J.P. Bouchaud and M. Mézard, Physica A 282:536-545 (2000)

[4] A. Chakraborti and B.K. Charkrabarti, Eur. Phys. J. 17:167-170 (2000)

[5] A. Dragulescu and V.M. Yakobenko, Eur. Phys. J. B 20:585 (2001)

[6] A. Dragulescu and V.M. Yakovenko, Physica A 299:213 (2001)

[7] B. Hayes, American Scientist 90: 400 (2002)

[8] L. Pacioli, *Summa de arithmetica*. Chapter: de computis et scripturis, Venecia (1494). Translation e.g. John Bart Geijsbeek (1914), reprinted in: Ancient double-entry bookkeeping, Scholars Book Co, Houston, Texas, USA (1974)

[9] C. R. McConnell, S. L. Brue "Economics: Principles, Problems, and Policies" (McGraw-Hill, New York, 1996)

[10] O. Issing, Einführung in die Geldtheorie, 11. Edition, Verlag Franz Vahlen, München, Germany, 1997

[11] J. Leimgruber, U. Proching, Rechnungswesen, 4. Edition, Verlag des Schweizerischen Kaufmännischen Verbandes, Zürich, Switzerland, 1992

[12] J.v. Hagen and J.H.v. Stein (Eds.), Geld- Bank und Börsenwesen, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, Germany, 2000

[13] E. Albisetti, M. Boemle, P. Ehrsam, M. Gsell, P. Nyfeller, E. Rutschi, Handbuch des Geld-Bank- und Börsenwesens der Schweiz, 4. Edition, Ott Verlag, Thun, Switzerland, 1996

[14] D. Braun, Physica A 290:491 (2001)

[15] R. Fischer and D. Braun, Nontrivial Bookkeeping: a mechanical perspective, submitted

[16] R. Fischer and D. Braun, Bicurrency structure of banking unveiled by bookkeeping mechanics, submitted

[17] Download LabView 5.1 source code or windows exe file from: http://www.dieterb.de/transfersimulator

[18] H.-E. Loef and H.G. Monissen (Eds), The economics of Irving Fisher. Reviewing the scientific work of a great economist. Edward Elgar Publishing, Northhampton, MA, USA, 1999

[19] D. Braun and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. 89:188103 (2002)

[20] B. Mandelbrot, Int. Econom. Rev. 1:79 (1960)